Génération du groupe linéaire

I Décomposition en produit de transvection :

$SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1\}$ est un ssg distingué de $GL_n(\mathbb{K})$

Obs : Si $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} \det M & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} M'$ où $M' \in SL_n(\mathbb{K})$

Transvection $\left| \begin{array}{l} i \neq j \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right.$ $\quad T_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij} \quad E_{ij}^2 = 0$

Props : 1) $T_{ij}(\lambda) \in SL_n(\mathbb{K})$

2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2 \quad T_{ij}(\lambda) T_{ij}(\mu) = T_{ij}(\lambda + \mu)$

$$T_{ij}(\lambda) T_{ij}(-\lambda) = I_n$$

Action des $T_{ij}(\lambda)$ à gauche et à droite

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ $i \neq j$. Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ $E_{ij} = \begin{array}{c} \scriptstyle j \\ \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$ $\scriptstyle i$

$$AE_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & a_{1i} & 0 \\ & \vdots & \\ & a_{ni} & \end{pmatrix} \\ \scriptstyle \uparrow j \end{array}$$ La $j$ème colonne est remplacée par la $i$ème

$$E_{ij} A = \begin{pmatrix} & 0 & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow i$$ la $i$ème ligne est remplacée par la $j$ème

$A T_{ij}(\lambda)$: $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, $T_{ij}(\lambda) A$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Décomposition : Si $A \in SL_n(\mathbb{K})$, A est produit de matrices $T_{ij}(\lambda)$

$\{T_{ij}(\lambda)\}_{1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{K}}$ est un système générateur de $\mathbb{K}$.

Quelques astuces : Legendre $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

Preuve : multiples de $p \leq n$: $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$

" $p^2 \leq n$: $2\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ - multiples de p^2 comptés à l'étape préc. $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$

" $p^k \leq n$ $k\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ - multiples de p^k comptés préc $(k-1)\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Preuve 2 : $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{p^k / i}$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{p^k / i}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

132

①

par récurrence sur n. On fait tout d'abord agir à gauche les matrices de transvection

Etape 1 : On amène 1 à la place $(1,1)$
la $1^{ère}$ colonne de A est $\neq 0$ car $\det A \neq 0$

1^{er} cas : $\exists i \geq 2$, $a_{i1} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ a_{i1} & & \end{pmatrix} \longrightarrow T_{1i}(\lambda)A \quad \begin{pmatrix} 1 & - & - \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\lambda : a_{11} + \lambda a_{i1} = 1$

2^e cas : $a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \longrightarrow T_{21}(1) \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{11} & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \xrightarrow{1er\ cas} \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Etape 2 : par action à ~~droite~~ gauche de $T_{i,1}(\lambda_i)$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Etape 3 : par action à droite on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \det B = 1 \text{ (dév par rapport à la première colonne)}$$

(2)

Étape 4 : le det est invariant par les transformations précédentes

donc $\det A = 1 \Rightarrow \det B = 1$

L'hypothèse de récurrence fournit des transvections

tq $\underbrace{T_{i_1 j_1}(\lambda_1) \dots T_{i_s j_s}(\lambda_s)}_{T_g} \underbrace{T_{i_{s+1} j_{s+1}}(\lambda_{s+1}) \dots T_{i_m j_m}(\lambda_m)}_{T_d}$ $\quad i_k \geq 2,\ j_k \geq 2$

$$T_g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} T_d = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

⚠ $i_k \geq 2$ et $j_k \geq 2$: pas d'action sur la 1ère ligne et la 1ère colonne.

Bilan : On trouve des $T_{i_k j_k}(\lambda_k)$, $k = 1 \dots s, \dots, p+1$

tq $T_{i_1 j_1}(\lambda_1) \dots T_{i_s j_s}(\lambda_s)\, A\, T_{i_{s+1} j_{s+1}}(\lambda_{s+1}) \dots T_{i_{p+1} j_{p+1}}(\lambda_{p+1}) = I_n$

et on inverse...

II Applications topologiques (HP)

Ex : Mq $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe (par arc)

S/ 1) $SL_n(\mathbb{C})$ est CPA

$$A = T_{i_1 j_1}(\lambda_1) \dots T_{i_m j_m}(\lambda_m)$$

$t \in [0,1]$

$\gamma(t) = T_{i_1 j_1}(t\lambda_1) \dots T_{i_m j_m}(t\lambda_m)$, $\det(\gamma_t) = 1$

(4)

5/ Soit $A \in P_n$ $A = P J_n Q$, $J_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$= \underbrace{P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} J_n \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu \end{pmatrix} Q}$

Astuce:
on choisit λ et μ pour que $\det(P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}) \to P'$
$= \det(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu \end{pmatrix} Q}_{Q'}) = 1$

On trouve $\gamma(t)$, $\delta(t)$ tq γ joint P' à I_n dans $SL_n(\mathbb{R})$
δ — Q' à I_n

$\Gamma(t) = \gamma(t) J_n \delta(t)$ $\begin{cases} \Gamma(0) = P' J_n Q' = A \\ \Gamma(1) = J_n \end{cases}$

III Le cas de $SL_n(\mathbb{Z})$

Soit $A \in SL_n(\mathbb{Z})$. Les op élém donnent des divisions euclidiennes. On envisage $\mathcal{A} = \{B \in SL_n(\mathbb{Z}) \mid B$ se déduit de A par des OP$_s$ élémentaires$\}$

On note $\varphi(B) = \sum_{i=1}^{n} |b_{i1}| \in \mathbb{N}^*$

Soit B_0 telle que $\varphi(B_0)$ soit minimum.

$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & \\ \vdots & \\ b_{n1} & \end{pmatrix}$ s'il existe $b_{i1} \neq 0$ et $b_{j1} \neq 0$ on écrit la DE : $b_{i1} = b_{j1} q + r$
$|r| < |b_{j1}|$

③

$\gamma(1) = A$, $\gamma(0) = I_n$

⊖ mon   ⓘ $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe $\varphi \left(\begin{array}{l} \mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ (\lambda, A) \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} A \end{array} \right)$

S/ $\mathbb{C}^*$ est connexe, $\mathcal{C}^0$ et φ est surjective, or $\mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C})$ est CPA

Variante: Soit $M, N \in GL_n(\mathbb{C})$, posons $\varphi(\lambda) = \det((1-\lambda)M + \lambda N)$

φ est un polynôme, $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(1) \neq 0$, $Z = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \varphi(\mu) = 0\}$ est fini, "On" sait que $\mathbb{C}^* \setminus Z$ est CPA

Soit $\delta(t)\ \mathcal{C}^0\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^* \setminus Z$ tq $\delta(0) = 0$, $\delta(1) = 1$

Soit $\sigma(t) = \varphi(\delta(t))$, σ prend ses vals dans $GL_n(\mathbb{C})$ | $\gamma(0) = M$, $\sigma(1) = N$

Ex : $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe

Ex : $GL_n(\mathbb{R})$ non connexe (car $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ non connexe)

donc un espace métrique aucun ensemble non est CPA.

Ex : Si $r < n$ $P_r = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rg} A = r\}$ est connexe.

4

OP. ELEM $b_{i1} \to b_{i1} - b_{j1} q = b'_{i1}$

(les autres termes de la 1ère col étant inchangés)

$\sum_{i=1}^{n} |b'_{i1}| < \sum_{i=1}^{n} |b_{i1}|$, absurde. Donc $\exists!\, i_0$ $b_{i_0 1} \neq 0$

$$1 = \det B_0 = \det \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ b_{i1} & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} = b_{i1} (-1)^{i+1} \det C_{i1}$$

$b_{i1} \in \{-1, 1\}$

FIN: Par opérations élémentaires de $SL_n(\mathbb{Z})$ on s'est ramené à

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{} \\ 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \\ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$

Ex: Soit p un nombre premier. Mq $\begin{array}{ccc} SL_n(\mathbb{Z}) & \to & SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ M & \mapsto & \bar{M} \end{array}$

est un morphisme surjectif

Soit $B \in SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ on écrit $B = T_{i_1 j_1}(\lambda_1) \cdots T_{i_r j_r}(\lambda_r)$

(6)

dans $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ $T_{i_1 j_1}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \bar{1} & & \lambda_1 \\ & \ddots & \\ \bar{0} & & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & & \bar{\mu}_1 \\ & \ddots & \\ \bar{0} & & \bar{1} \end{pmatrix}$

il vient $B = \varphi(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & & \mu_1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & \mu_k \\ & \ddots & \\ \mu_r & & 1 \end{pmatrix}$

Ex On suppose $p=3$. Soit G un sg fini de $SL_n(\mathbb{Z})$.
Mq $\varphi|_G$ est injectif (ind $A^{\mathrm{card}\, G} = I$) en déduire une majoration de G
(vacances)